

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. (Σχολικό βιβλίο σελ.111)

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

A2. (Σχολικό βιβλίο σελ.104)

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη

στο (a, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$.

A3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 128)

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία

Εφόσον υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

A4. α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πεδίο ορισμού της g είναι $\Delta g = \mathbb{R}$ και της h είναι $\Delta h = (0, +\infty)$

$$x \in \Delta_{goh} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \Delta h \\ \text{και} \\ h(x) \in \Delta g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ h(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ άρα } \Delta_{goh} = (0, +\infty)$$

Τύπος της goh

$$(goh)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x} = \frac{4}{x} - x \text{ με } x > 0$$

B2.

i. $f'(x) = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$$\pi > e \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e}$$

Όμως $4 - e^2 < 0$ άρα $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$

B3. $f(x) = \frac{4}{x} - x \Leftrightarrow f(x) + x = \frac{4}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \text{ άρα η ευθεία } y = -x \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ όταν } x \rightarrow +\infty$$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

B4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x} - x \right) = -\infty$

Έχουμε $|\sin(1+x^2)| \leq 1$ πολλαπλασιάζω με $\left| \frac{1}{f(x)} \right|$

Τότε $\left| \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right|$

Άρα $\left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right|$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{1}{f(x)} \right| \right) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 0$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + a, & x \geq 1 \end{cases}$$

Γ1.

$$\int_2^3 x f(x) dx = \int_2^3 x \left(\frac{1}{x} + a \right) dx = \int_2^3 (1 + ax) dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left[x + \frac{ax^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9a}{2} - (2 + 2a) = 1 \Leftrightarrow$$

$$3 + \frac{9a}{2} - 2 - 2a = 1 \Leftrightarrow \frac{9a}{2} = 2a \Leftrightarrow 9a = 4a \Leftrightarrow 5a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Γ2.

i. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\}$ η f συνεχής στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) + f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{x-1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1} = -1 \text{ \u0391\u03c1\u03b1 \u03b7 } f \text{ \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03b3\u03c9\u03b3\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b7 \u03c3\u03c4\u03bf } x_0 = 1 \text{ \u03bc\u03b5 } f'(1) = -1$$

\u0386\u03c1\u03b1 \u03c5\u03c1\u03b9\u03b6\u03b5\u03b9\u03c4\u03b1 \u03b5\u03c6\u03b1\u03c0\u03c4\u03bf\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7 \u03c4\u03b7\u03c2 C_f \u03c3\u03c4\u03bf $x_0 = 1$

ii. $(\epsilon): y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y - 1 = -x + 1$$

$$y = -x + 2$$

$$\lambda = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$$

\u03933.

\u0393\u03b9\u03b1 $x < 1: f'(x) = 2x - 3$

x	$-\infty$	1
f'		-

\u0393\u03b9\u03b1 $x > 1: f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

x	1	$+\infty$
f'		-

\u0386\u03c0\u03b5\u03b9\u03b4\u03b7 \u03b7 f \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c3\u03c5\u03bd\u03b5\u03c7\u03b7\u03c2 \u03c3\u03c4\u03bf $x_0 = 1$ \u03ba\u03b9 $f'(x) < 0$ \u03b3\u03b9\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5 $x \in \mathbb{R}$ \u03b7 f \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b3\u03b7\u03bd\u03b9\u03c3\u03b9\u03c9\u03c2 \u03c6\u03b8\u03b9\u03bd\u03bf\u03c5\u03c3\u03b1 \u03c3\u03c4\u03bf \mathbb{R} .

\u0386\u03c1\u03b1 \u03c3\u03c5\u03bd\u03bf\u03bb\u03bf \u03c4\u03b9\u03bc\u03c9\u03bd \u03c4\u03b7\u03c2 f \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 $f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (0, +\infty)$

\u03934.

$$E(\Omega) = \int_1^2 (f(x) - y) dx + \int_2^e f(x) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx =$$

$$\left[\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 + \left[\ln x \right]_2^e =$$

$$\left[\ln 2 + 2 - 4 \right] - \left[\frac{1}{2} - 2 \right] + (1 - \ln 2)$$

$$= \ln 2 - 2 - \frac{1}{2} + 2 + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Κοντά στο $x_0 = 1$ ορίζω

$$g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l \quad \text{τότε } (x-1)g(x) + 2x = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)g(x) + 2x] = 2$$

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa \right] = -1 + \kappa \quad \text{άρα } \kappa = 3$$

Δ2.

$$\text{Άρα } f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 2 - x}{(2-x)x^2} = \frac{-x^2 - x + 2}{(2-x)x^2} = \frac{(x-1)(-x-2)}{(2-x)x^2} = \frac{-(x-1)(x+2)}{(2-x)x^2} \quad \text{με } x \in (0,2)$$

x	0	1	2
f'(x)		○	-
f		↗	↘

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(2-x) + 3] = \ln 2 + 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty \quad \text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [\ln(2-x)] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-\frac{1}{x} + 3 \right] = -\frac{1}{2} + 3 \quad \text{άρα } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

Έστω $A_1 = (0,1]$ τότε $f(A_1) = (-\infty, 2]$

$0 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in A_1$ και μάλιστα μοναδικό η f είναι γνησίως αύξουσα τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Έστω $A_2 = [1,2)$ τότε $f(A_2) = (-\infty, 2]$ όμως $0 \notin f(A_2)$

Άρα υπάρχει $x_2 \in A_2$ και μάλιστα είναι μοναδικό αφού η f στο A_2 είναι γνησίως φθίνουσα τέτοιος ώστε $f(x_2) = 0$

$$\text{Επειδή } \frac{1}{3} \in A_1 \text{ τότε } x_1 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln \frac{5}{3}$$

$$\text{που ισχύει αφού } \ln \frac{5}{3} = \ln \left(1 + \frac{2}{3} \right) > 0$$

Δ3.

Ισχύει το ΘΜΤ στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) : f(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(2-x)^2} - \frac{2x}{x^4} = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0, \quad x \in (0,2)$$

Άρα f' είναι γνησίως φθίνουσα και το ξ είναι μοναδικό.

Δ4.

i. $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$

Και $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = G(x_2) - G(x_1)$

Τότε $F(x_2) - F(x_1) = G(x_2) - G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$

(ii) Ορίζω $h(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x, \quad x \in [x_1, x_2]$

Είναι

$$h(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 = -x_2 F(x_2) + x_1 - x_2 = -(x_2 F(x_2) + x_2 - x_1)$$

και

$$h(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1.$$

f γνησίως αύξουσα για $x \in (x_1, 1)$, άρα $x > x_1 \Leftrightarrow f(x) > f(x_1) = 0$

f γνησίως φθίνουσα για $x \in (1, x_2)$, άρα $x < x_2 \Leftrightarrow f(x) > f(x_2) = 0$

Δείξαμε $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (x_1, x_2) \Leftrightarrow F'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (x_1, x_2)$, άρα F γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2)

Αν $x_1 < x < x_2 \Leftrightarrow \overset{f \nearrow}{F(x_1)} < F(x) < F(x_2) \Leftrightarrow 0 < F(x) < F(x_2)$

Άρα $F(x_2) > 0$

- $F(x_2) > 0$

$$\Leftrightarrow x_2 F(x_2) > 0 \text{ και } x_2 - x_1 > 0$$

$$\text{Άρα } x_2 F(x_2) + x_2 - x_1 > 0 \Leftrightarrow -(x_2 F(x_2) + x_2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow h(x_1) < 0$$

- $F(x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1 F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$

$$\text{Άρα } x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 > 0 \Leftrightarrow h(x_2) > 0$$

Τότε $h(x)$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$$h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$

$$\text{Τέτοιο ώστε } h(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_1 F(x_0) + x_2 G(x_0) = x_1 + x_2 - 2x_0$$

$$\text{Όμως } h'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2 = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0$$

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

Άρα x_0 μοναδικό τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας και κάλυπταν όλο το εύρος της ύλης . Υπήρχαν ωστόσο κάποια ερωτήματα που απευθύνονταν σε πολύ καλά διαβασμένους μαθητές.

Συγγραφή Απαντήσεων
Ομάδα Μαθηματικών Ρόμβου